

数学-EX

Extra Math

Extra What??

GCD和LCM

- 最大公约数（GCD）：多个数共有的约数中最大的那个
- 最小公倍数（LCM）：多个数共有的倍数中最小的那个
- 求GCD：辗转相除法（欧几里得算法） $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$

```
int gcd(int a, int b)
{
    if(!b) return a;
    else return gcd(b, a % b);
}
```

$$\text{lcm}(a, b) = \frac{ab}{\gcd(a, b)}$$

那我问你

- 求解不定方程

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

举个例子 $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$

$$\begin{aligned} & \gcd(30, 12) \\ &= \gcd(12, 6) \\ &= \gcd(6, 0) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 0y &= 6 \\ 12x + 6y &= 6 \\ 30x + 12y &= 6 \end{aligned}$$

在回溯过程中发生了什么？

$$a \bmod b = a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b$$

$$bx_1 + (a \bmod b)y_1 = \gcd(b, a \bmod b)$$

$$bx_1 + (a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b)y_1 = \gcd(a, b)$$

$$ay_1 + b(x_1 - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot y_1) = \gcd(a, b)$$

$$x = y_1, y = x_1 - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor y_1$$

$$6x + 0y = 6$$

$$12x + 6y = 6$$

$$30x + 12y = 6$$

$$x = 1, y = 0$$

$$x = 0, y = 1$$

$$x = 1, y = -2$$

EXGCD

- 扩展欧几里得

```
void exgcd(int a, int b, int &x, int &y)
{
    if(!b) x = 1, y = 0;
    else exgcd(b, a % b, y, x), y -= a / b * x;
}
```

- 给出不定方程 $ax + by = \gcd(a, b)$
- 可以解出某一组解

EXGCD能做什么？

- 解不定方程
- 没了 (?)

小练习

15:30-16:15